

PAPÍROVÉ MODELY VE VÝUCE GEOMETRIE

JANA HROMADOVÁ

Skládání papíru dětem není nijak cizí. Již jako malé si z papíru vyrábí vlačkovky, lodičky, čepice nebo si pomocí překládání a vystřihování vyrábí jednoduché dekorativní předměty. Ráda bych ve svém příspěvku představila několik jednoduchých ukázek využití papíru ve výuce matematiky, potažmo geometrie. Budu se věnovat většinou modelům vyrobeným z jednoho kusu papíru.

Rozsah příspěvku neumožňuje věnovat se této problematice příliš do hloubky. Pokusím se na několika příkladech poukázat na možnosti práce s papírem při výuce postupně na všech stupních vzdělávání.

1 Elementární geometrické útvary a pojmy

Na prvním stupni základní školy je velice důležité pracovat s hmotnými modely geometrických objektů. Hmotné modely trojúhelníků, čtyřúhelníků a dalších napomáhají správnému pochopení těchto pojmů a práce s nimi i na vyšších stupních vzdělávání může napomoci odstranění zažitých mylných představ, že n -úhelník je tvořen pouze svou hranicí a nemá žádné vnitřní body (viz [1]). Výhodou papírových modelů oproti modelům z pevnějších materiálů je nejen to, že jsou levné a lze je kdykoliv vyrobit znovu, ale především to, že papír je ohebný a lze s ním dále pracovat.

V papírovém modelu čtverce (popř. obdélníku) lze snadno ohýbáním sestrojit úhlopříčky či střed útvaru a uvědomit si, že úhlopříčky se navzájem půlí. V rámci výzkumu porozumění geometrickým pojmům, který provádíme spolu s kolegy z katedry didaktiky matematiky, jsme se setkali s tím, že někteří žáci na úrovni šestých tříd základní školy mají problém nalézt osy souměrnosti útvarů. Za osy souměrnosti rovnoběžníku (různého od čtverce a obdélníku) často považují jeho úhlopříčky nebo spojnice středů protilehlých stran. Přeložením papírového modelu podle domnělé osy snadno svou hypotézu potvrdí či vyvrátí.

Překládáním papírového trojúhelníku tak, aby zvolená hrana po přeložení byla samodružná a ohyb procházel protilehlým vrcholem, je možné sestrojit výšky¹ trojúhelníku. Přehybem, který ztotožní dva vrcholy, sestrojíme střed strany a následně pak těžnici tímto středem procházející. Snadnou manipulací pak můžeme se žáky odvodit, které trojúhelníky jsou osově souměrné atp.

¹ Konstrukci výšky v tupohléhém trojúhelníku procházející vrcholem tupého úhlu lze provést, pouze pokud pracujeme s celým papírem, na němž je trojúhelník vyznačen a ne jen s vystřiženým trojúhelníkem.

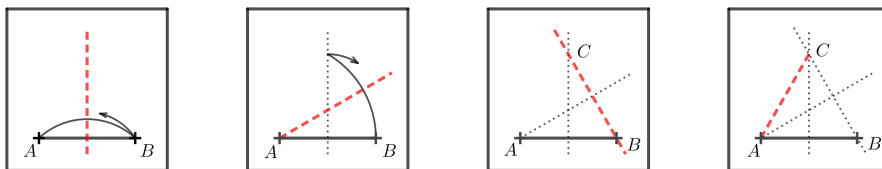
Pomocí překládání můžeme sestřít osy úseček i osy úhlů a sestřít tak střed opsané² či vepsané kružnice pro daný trojúhelník. Výuku Thaletovy věty lze zpestřit konstrukcí několika bodů kružnice nad zadaným průměrem.

Všechny zmíněné konstrukce by žák mohl provádět pravítkem a kružítkem pouze v sešitě, ale pokud dostane dříve do ruky papír a umožníme mu takové konstrukce fyzicky vykonat, dáme mu pro pozdější rýsování v sešitě další nástroj, jak úlohy řešit a jak o nich přemýšlet.

2 Pravidelné mnohoúhelníky

Na internetu lze nalézt řadu návodů konstrukcí pravidelných n -úhelníků ohýbáním papíru. Některé se omezují pouze na sestrojení daného útvaru, jiné popisují konstrukci útvaru o maximálních rozměrech, který lze z daného například čtvercového papíru sestřít.

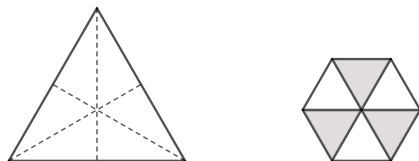
Studenti by mohli objevit sami minimálně konstrukci rovnostranného trojúhelníku a čtverce, ideálně z papíru, který nemá žádné rovné hrany. Předpokládejme, že máme danu (případně si zvolíme) stranu AB rovnostranného trojúhelníku (obr. 1). Chybějící vrchol C trojúhelníku budeme hledat na ose úsečky AB . Sestrojením překlada, při němž bod A zůstane na místě a bod B padne na osu AB , vytvoříme osu strany BC . Stranu BC pak sestrojíme jako část přehybu procházejícího bodem B kolmo k ose strany BC . Stranu AC můžeme sestřít obdobně, nebo využijeme již sestrojeného vrcholu C . Lomené šipky v obrázcích znamenají přeložení a opětovné rozložení papíru, právě sestrojený přehyb je vždy barevně zvýrazněn.



Obr. 1: Konstrukce rovnostranného trojúhelníku

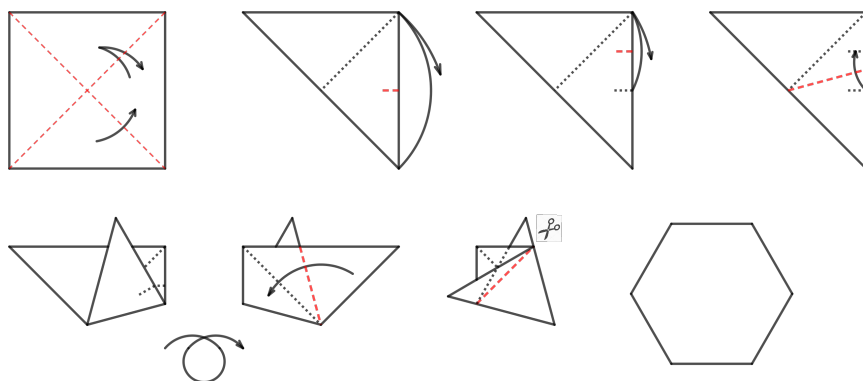
Některé origami konstrukce vycházejí z pravidelného šestiúhelníku. Ukažme si tedy ještě konstrukci tohoto útvaru. Jedné takové, kterou by opět studenti mohli objevit sami, předchází sestrojení rovnostranného trojúhelníku, z něhož pak pomocí tří překlada, při nichž vrcholy trojúhelníku splynou s těžištěm trojúhelníku, vytvoříme pravidelný šestiúhelník (obr. 2).

² Platí totéž co u výšek, je-li střed vnějším bodem trojúhelníku, museli bychom pracovat s papírem (ideálně trochu průhledným), na němž je trojúhelník vyznačen.



Obr. 2: Konstrukce pravidelného šestiúhelníku z rovnostranného trojúhelníku

Jiná konstrukce, tentokrát z čtvercového papíru, je naznačena na následujících obrázcích. Opět je v dílčích obrázcích barevně zvýrazněn prováděný ohyb, šipka tvořící smyčku naznačuje otočení.



Obr. 3: Konstrukce pravidelného šestiúhelníku ze čtvercového papíru

3 Trisekce úhlu, úhly v trojúhelníku

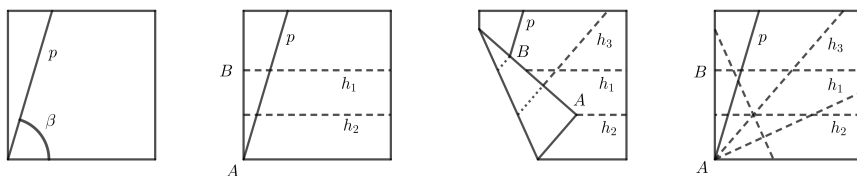
Je známo, že úsečku lze eukleidovskými konstrukcemi³ rozdělit na libovolný počet stejných částí, avšak rozdělit úhel na něco tak jednoduchého, jako jsou jeho třetiny, eukleidovsky nelze. Algebraické řešení trisekce úhlu vede k hledání kořenů kubické rovnice, což na rozdíl od eukleidovských postupů konstrukce používané v origami umožňují⁴. Ukážeme si zde konstrukci, kterou pro trisekci ostrého úhlu objevil japonský matematik Hisashi Abe⁵. Budeme vycházet z čtvercového či obdélníkového papíru, na němž ohybem p vytvoříme model ostrého úhlu β tak, aby se jeho ramena potkávala v levém dolním rohu papíru (obr. 4). Dále vytvoříme libovolný horizontální překlad h_1 a poté k němu přiložíme dolní okraj papíru, čímž vytvoříme další překlad h_2 půlící vzdálenost dolního okraje od prvního horizontálního překladu. Označme A levý dolní roh papíru a B koncový bod h_1 na levé hraně papíru. Nyní přeložíme papír tak, aby bod A padl na h_2 a bod B na p . Ještě ve složené poloze znovu ohneme

³ Eukleidovské konstrukce jsou konstrukce pomocí kružítka a pravítka, které nemá vyznačené měřítko a má jen jednu rovnou hranu.

⁴ Souvisí to s možností sestavit takový překlad papíru, aby dva zvolené body padly na dvě zvolené přímky, více viz např. [2].

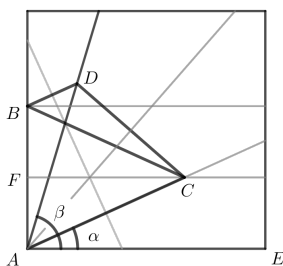
⁵ Konstrukci publikoval v roce 1970.

papír podle hrany h_2 , čímž získáme hranu h_3 . Papír rozložíme a znovu přeložíme podél h_3 , abychom hranu prodloužili přes celý papír. Sestrojená hrana prochází bodem A, přičemž velikost úhlu, který svírají hrany p a h_3 je třetinou velikosti původního úhlu β . Nyní již stačí přeložit papír tak, aby dolní hrana papíru splýnula s nalezenou hranou h_3 a konstrukce je hotova.



Obr. 4: Trisekce ostrého úhlu

K důkazu (viz např. [3]) konstrukce si v obrázku 5 označme C, D pozice bodů A, B po přeložení papíru. Tyto body jsou obrazy bodů A, B v osové souměrnosti podle přehybu, z čehož vyplývá, že čtyřúhelník $ACDB$ je rovnoramenný lichoběžník. Chceme dokázat, že $\beta = 3\alpha$, kde $\alpha = \angle CAE, \beta = \angle DAE$. Z rovnoběžnosti AE a FC plyne $|\angle CAE| = |\angle ACF|$ a protože CF je výška v rovnoramenném trojúhelníku ACB platí též $|\angle ACF| = |\angle FCB| = |\alpha|$. Z vlastností rovnoramenného lichoběžníku vyplývá, že velikost úhlu CAD je stejná jako velikost úhlu ACB a tedy 2α . Je tedy $\beta = 3\alpha$.

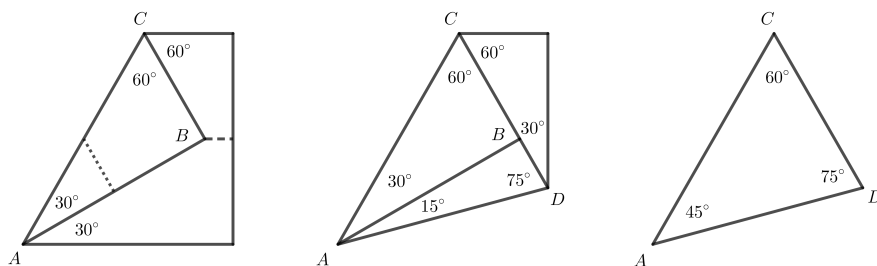


Obr. 5: Důkaz konstrukce

Aplikujme tuto konstrukci hned v další ukázce, při níž si s žáky vytvoříme papírový „úhloměr“ (viz např. [4]). Vyjdeme ze čtvercového papíru, na němž pomocí několika překládů vytvoříme úhly o velikostech $15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ, 105^\circ, 120^\circ$ a 150° .

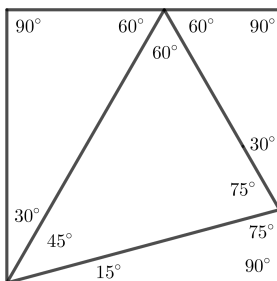
Čtvercový papír přehneme horizontálně na polovinu a rozložíme zpět. Papír dále přehneme tak, aby např. levý dolní roh zůstal na místě a levý horní roh padl na sestrojený horizontální přehyb (obr. 6). Lze nahlédnout, že jsme tímto ohybem vytvořili trojúhelník ABC , který má při vrcholu A úhel o velikosti 30° (třetina původně pravého úhlu při levém dolním okraji papíru). Jedná se o pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem při vrcholu B , tedy velikost úhlu při vrcholu C je 60° . Snadno nahlédneme, že i sousedící vzniklé úhly mají velikosti

30° a 60° . Přiložme nyní dolní hranu papíru k hraně AB . Ve vytvořeném pravoúhlém trojúhelníku ABD je velikost úhlu při vrcholu A 15° , vytvořili jsme jej půlením úhlu o velikosti 30° . Na úhel při vrcholu D tedy zbývá 75° . Přeložme nyní papír ještě podle úsečky CD . Vytvořený trojúhelník ACD má při svých vrcholech úhly o velikostech 45° , 75° a 60° .



Obr. 6: Úhly v trojúhelníku

Na obrázku 7 je znázorněn rozložený papír s vyznačenými sestrojenými úhly. Vhodným překládáním podle již sestrojených hran můžeme získat ještě úhly o velikostech 105° , 120° a 150° .



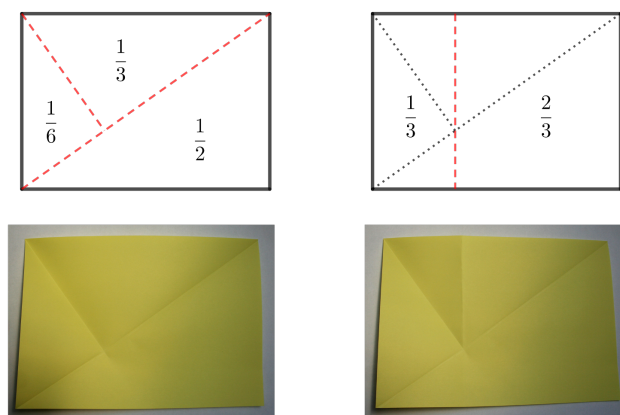
Obr. 7: Papírový úhloměr

4 Práce s kancelářským papírem

Všimněme si nyní formátů papíru např. řady A. Jsou sestrojeny tak, aby poměr kratší ku delší straně byl vždy $1 : \sqrt{2}$ ⁶. Výhodou této volby je fakt, že při rozdělení papíru napůl (rovnoběžně s kratší stranou) zůstává poměr stran zachován. Podle velikosti seřazené papíry formátu A tvoří geometrickou posloupnost, jejíž kvocient závisí na tom, zda se budeme bavit o obsahu obdélníku ($q = 1/2$) či o rozměrech papírů ($q = \sqrt{2}/2$). Díky danému poměru stran lze poměrně jednoduše rozdělit papír např. velikosti A4 na tři podobné trojúhelníky, jejichž obsahy tvoří $1/2$, $1/3$ a $1/6$ celkového obsahu papíru. Konstrukce je zobrazena na obrázku 8 vlevo. Nejprve jsme přehnuli papír podle úhlopříčky obdélníku a poté jsme sestrojili překlad vedený kolmo k úhlopříčce

⁶ Rozměry papírů jsou zaokrouhleny na celé milimetry.

jedním z vrcholů, které na úhlopříčce neleží. Vedeme-li vrcholem nejmenšího trojúhelníku při pravém úhlu ohyb rovnoběžně s kratší stranou papíru (obr. 8 vpravo), rozdělí tento ohyb celý papír na dvě části, jejichž obsahy jsou v poměru 1 : 2. Šikovnější student by mohl být schopen odvodit správnost této konstrukce nebo naopak z konstrukce odvodit poměr obsahů zadaných trojúhelníků či obdélníků.



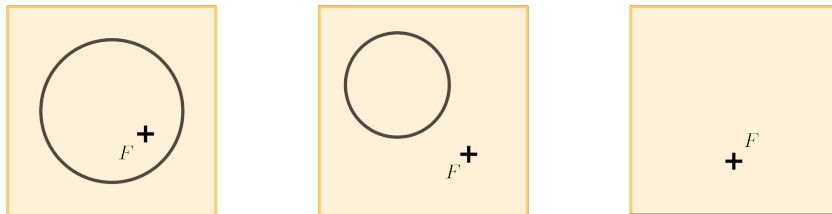
Obr. 8: Formát A4

Pro srovnání jsou v obrázku 8 zobrazeny fotografie i na počítači vytvořený model popisované situace. Z fotografie nelze vždy spolehlivě vyčíst všechny vlastnosti modelu, neboť se jedná o středový průmět. Při středovém promítání se nezachovává například rovnoběžnost či dělicí poměr.

5 Kuželosečky

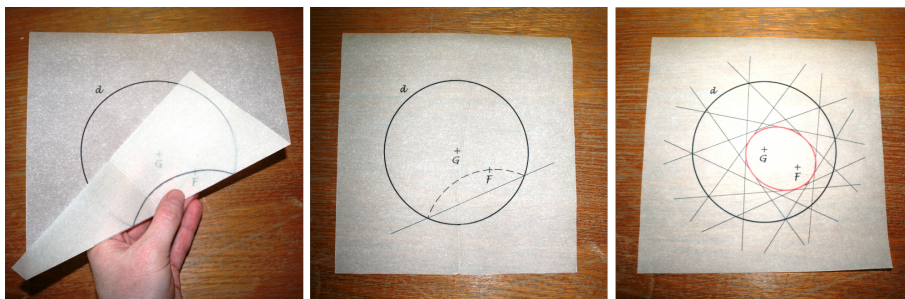
Na střední škole se studenti seznamují s kuželosečkami pouze v rámci analytické geometrie a to už ne na všech typech škol⁷, nebo pak v deskriptivní geometrii. Ukažme si zde jednu více či méně známou konstrukci, pomocí níž můžeme sestavit kuželosečky jakožto obálky svých tečen. Budeme potřebovat průsvitný papír (u paraboly postačí i neprůhledný). Na něj si v případě, že chceme získat elipsu, nakreslíme kružnici a zvolíme libovolný bod z vnitřní oblasti kružnice různý od středu kružnice. Pro hyperbolu použijeme rovněž kružnici a zvolíme libovolný bod z vnější oblasti. Pro parabolu potřebujeme papír s alespoň jednou rovnou hranou (tu můžeme zvýraznit, bude hrát stejnou roli jako kružnice u středových kuželoseček) a dále zvolíme libovolný bod mimo ni.

⁷ Téma kuželosečky můžeme nalézt v rámci analytické geometrie v RVP pro gymnázia, ale již ne pro SOŠ.



Obr. 9: Konstrukce tečen kuželoseček ohýbáním papíru

Při konstrukci budeme ohýbat papír tak, aby po přeložení zadaná kružnice, resp. přímka vždy procházela vyznačeným bodem, jak je vidět na obrázku 10.



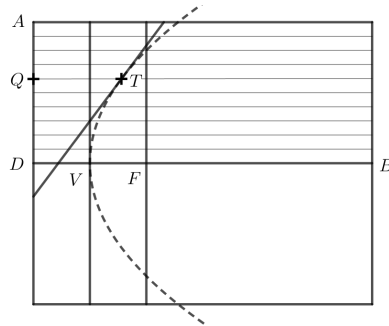
Obr. 10: Konstrukce tečen elipsy

Konstrukce vychází z ohniskových vlastností kuželoseček, konkrétně z toho, že řídicí kružnice, resp. přímka (u paraboly) je množinou všech bodů souměrných s ohniskem kuželosečky podle jejích tečen. Tedy každý takto sestrojený ohyb představuje tečnu kuželosečky, pro niž je zadaný bod ohniskem a zadaná kružnice resp. přímka řídicí kružnicí, resp. přímkou. Sestrojíme-li takových ohybů dostatečný počet, brzy se nám před očima z papíru vyloupne konstruovaná kuželosečka. Tato úloha je též velmi vhodná pro modelování v softwaru Geogebra.

S oblibou jsem tuto úlohu bez specifikace, co vlastně hledáme, zadávala studentům prvního ročníku M-DG, ještě před tím, než jsme začali probírat kuželosečky, abych si tak ověřila, zda již něco o kuželosečkách znají ze střední školy. Podrobnější popis konstrukcí naleznete např. v [5], nebo v [6].

Ukažme si ještě, např. u paraboly, jak dohledat body dotyku takových tečen. Situace je znázorněna na obrázku 11, vytvořeného dle [7], str. 116. Vycházíme z obdélníkového papíru, ale opět by nám postačil i papír s jedinou rovnou hranou. Hrana papíru AD reprezentuje řídicí přímku paraboly, k ní kolmý přehyb DB nechť je osou paraboly. Sestrojíme ještě ohyb rovnoběžný s řídicí přímkou procházející bodem F , který volíme libovolně na ose. Přiložíme-li nyní hranu AD na sestrojený ohyb, získáme vrcholovou tečnu paraboly a spolu s ní i vrchol V paraboly na ose. Nyní sestrojíme několik překladů papíru rovnoběžně s osou paraboly. Libovolně zvolený překlad protne řídicí přímku paraboly v bodě Q .

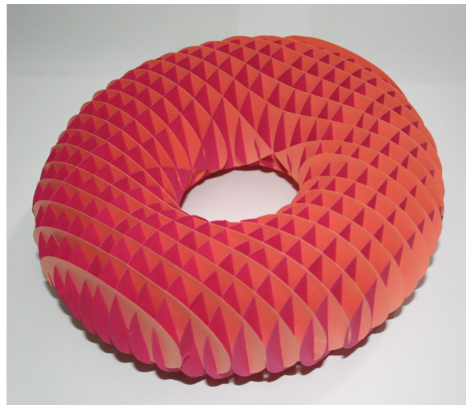
Překlad papíru sestrojený tak, aby bod Q splynul s bodem F , vytvoří tečnu paraboly, její bod dotyku T s křivkou nalezneme na průvodiči (ohybu) procházejícím bodem Q rovnoběžně s osou paraboly.



Obr. 11: Konstrukce bodů dotyku tečen s parabolou

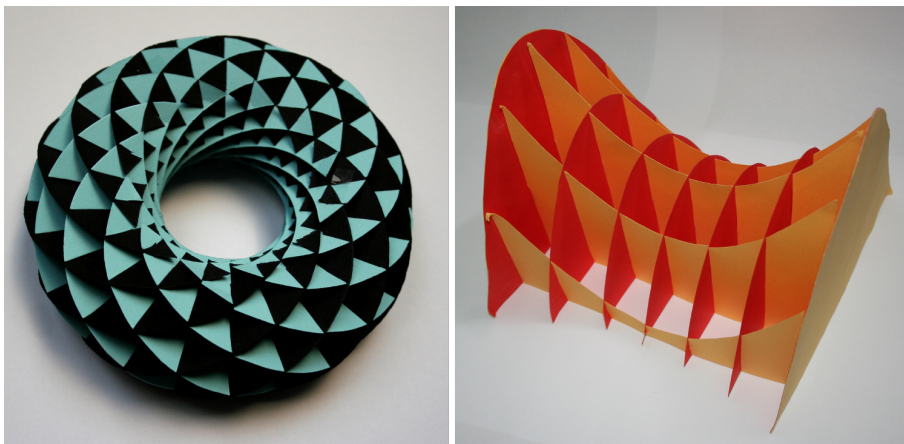
6 Hyperbolický paraboloid

Zastavme se na chvíli u modelů, které využíváme v hodinách deskriptivní geometrie na MFF UK. Některé z nich by bylo možné využít i na středních školách v hodinách stereometrie. Poměrně jednoduché na výrobu (i když časově náročné) jsou modely sestavené z rovinných řezů těles, zobrazené na následujících obrázcích. Lze pomocí nich velice názorně modelovat například řezy na kuželových plochách, ale i řezy hranatých těles či jiných složitějších těles či ploch. Na obrázcích 12 až 14 jsou zobrazeny tři modely anuloidu. V prvním jsou znázorněny rovnoběžkové a meridiánové kružnice anuloidu, na druhém Perseovy křivky, které vznikají jako řezy anuloidu rovinami rovnoběžnými s osou anuloidu. Na třetím obrázku vidíme Villarceauovy kružnice, v nichž protíná anuloid tzv. dvojnásob tečná rovina (je tečnou rovinou pro dva různé body meridiánu).



Obr. 12 (vlevo): Rovnoběžkové a meridiánové kružnice

Obr. 13 (vpravo): Perseovy křivky

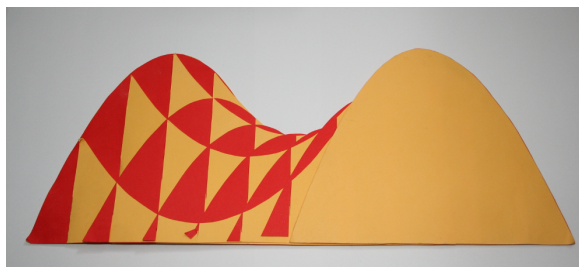


Obr. 14 (vlevo): Villarceauovy kružnice

Obr. 15 (vpravo): Parabolické řezy na hyperbolickém paraboloidu

Pěkně se takto modelují i křivky na hyperbolickém paraboloidu, ať už se jedná o přímky, nebo o parabolické či hyperbolické řezy plochy (obr. 15).

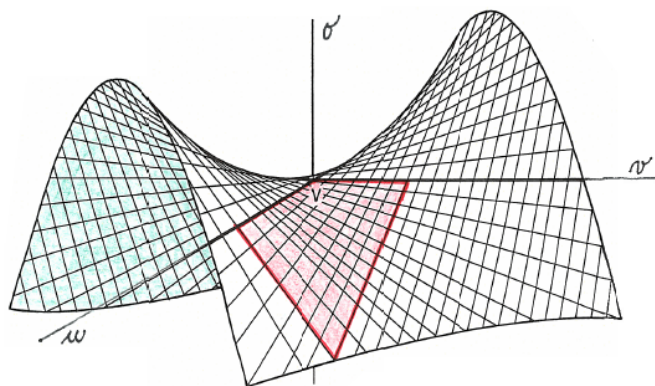
Skládají-li se modely ze dvou systémů navzájem rovnoběžných řezů, mají další nezanedbatelnou výhodu. Na obrázku 16 vidíme do roviny sklopený model hyperbolického paraboloidu (jaká to úspora místa v kabinetu deskriptivní geometrie). Většina zde zobrazených modelů vznikla jako zápočtové práce našich studentů.



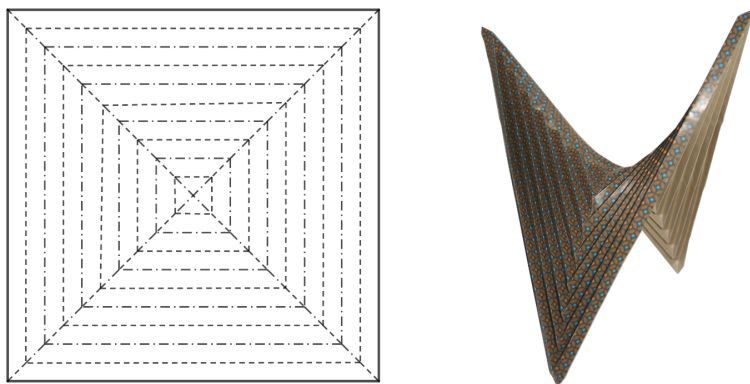
Obr. 16: Model hyperbolického paraboloidu složený do roviny

Na závěr se vraťme k modelům, které lze vytvořit z jednoho kusu papíru. Ukažme si zajímavý model hyperbolického paraboloidu. Abychom si dovedli lépe představit, jak bude výsledný model vypadat, podívejme se nejprve na obrázek 17. Hyperbolický paraboloid je přímková plocha obsahující dva systémy přímek. Přímky jednoho systému jsou navzájem mimoběžné, ale všechny jsou rovnoběžné s danou řídicí rovinou (pro každý systém jinou). Každá přímka jednoho systému je různoběžná se všemi přímkami druhého systému. Libovolné dvě různé přímky jednoho systému a dvě různé přímky druhého systému určují zborcený čtyřúhelník (na obrázku 17 je jeden takový vyznačen červenou barvou). Libovolným zborceným čtyřúhelníkem je hyperbolický paraboloid jednoznačně zadán. Náš model bude reprezentovat právě jeden takový zborcený

čtyřúhelník. Jeho výroba je překvapivě snadná; zvolíme-li snazší verzi modelu, zabere tvorba maximálně půl hodiny. Ke skládání potřebujeme čtvercový papír⁸, na němž vytvoříme přehyby naznačené v obrázku 18. Čárkované čáry znamenají ohyb, při němž hrana směřuje vzhůru, zjednodušeně řečeno vytváří „horu“, čerchované ohyb, při němž hrana směřuje dolů neboli vytváří „údolí“. Podrobný obrázkový návod na tvorbu toho to modelu lze nalézt například v [8], pro finální část skládání modelu je ale dobré se podívat na video návod, viz např. [9].



Obr. 17: Hyperbolický paraboloid jako přímková plocha⁹



Obr. 18 (vlevo): Čtvercový papír s naznačenými ohyby
Obr. 19 (vpravo): Výsledný model

⁸ Obdobný model by šel vytvořit i z papíru ve tvaru libovolného konvexního čtyřúhelníku. Jeho hrany, stejně jako u čtvercového papíru, budou hranami zborceného čtyřúhelníku.

⁹ Obrázek je převzat z výukových materiálů Aleny Šarounové.

7 Závěr

Práce s papírem i rýsování vyžaduje jistou trpělivost a pečlivost a přispívá k rozvoji jemné motoriky žáků. Je prokázáno (viz např. [10], str. 152–153), že při vnímání nových poznatků nejen vizuální a verbální formou, ale i hmatem (hapticky), dochází v našem mozku k propojení více center a tím i k hlubšímu zapamatování poznatků. Občasné zařazení práce s papírem do výuky matematiky může tedy výuku nejen zatraktivnit, ale i dopomoci k lepšímu pochopení probírané látky i k jejímu propojení s jinými oblastmi matematiky.

Poděkování. Tento článek vznikl za podpory programu Univerzitní výzkumná centra UK, č. UNCE/HUM/024, a projektu PROGRES Q17 *Příprava učitele a učitelská profese v kontextu vědy a výzkumu*.

LITERATURA

- [1] J. Robová, V. Moravcová, Z. Halas, J. Hromadová, *Žákovské koncepty trojúhelníku na začátku druhého stupně vzdělávání*, Scientia in educatione, 2018 (v recenzním řízení).
- [2] R. Lang, *Origami and geometric constructions*, 2003. Dostupné z: bit.ly/2x8inKt
- [3] D. Richeson, *Angle trisection using origami*, 2012. Dostupné z: divisbyzero.com/2012/06/01/angle-trisection-using-origami/
- [4] *Paper protractor*. Dostupné z: www.arvindguptatoys.com/toys/protractor.html
- [5] Š. Voráčová a kol., *Atlas geometrie*, Academia, Praha, 2012.
- [6] V. Effenberger, *Kuželosečky*, diplomová práce, MFF UK, 2011. Dostupné z: kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/vera.setmanukova.dp/
- [7] T. Sundara, *Row's geometric exercises in paper folding*, The Open Court Pub. Co., Chicago, 1917. Dostupné z: archive.org/details/tsundararowsgeo00rowrich
- [8] E. Demaine, *Hyperbolic paraboloid*. Dostupné z: erikdemaine.org/hypar/hypar_folding.pdf
- [9] E. Gjerde, *Origami Hyperbolic Parabola Instructions*, 2013. Dostupné z: www.youtube.com/watch?v=4g10cLHp6yI
- [10] M. Spitzer, *Digitální demence*, Host, Brno, 2016.

RNDr. Jana Hromadová, Ph.D.
 Katedra didaktiky matematiky MFF UK
 Sokolovská 83
 186 75 Praha 8
jole@karlin.mff.cuni.cz